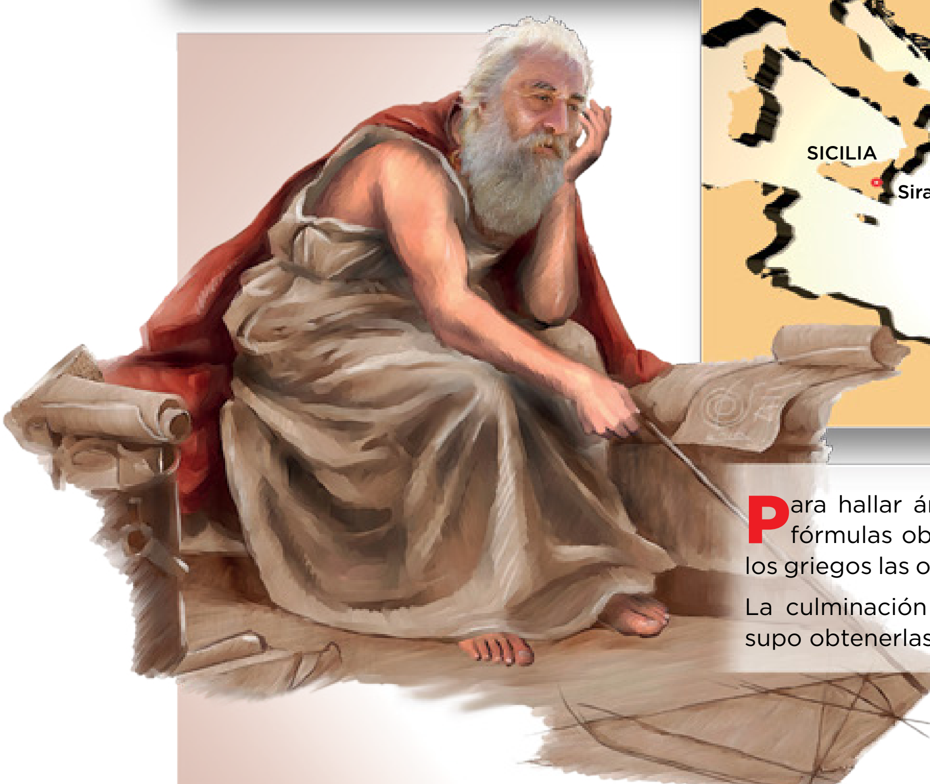
13 Áreas y perímetros

La cultura griega se extendió por el Mediterráneo desde Sicilia hasta Asia Menor. Los griegos aprendieron la geometría egipcia, práctica y utilitaria, y la superaron, cultivándola de forma teórica, por el placer intelectual de investigar y saber.

Cuentan que un barco griego naufragó y algunos viajeros consiguieron llegar a una playa desconocida. En la arena vieron dibujadas algunas figuras geométricas. Entonces uno de ellos exclamó: “¡No temamos, compañeros!, aquí viven personas civilizadas”.



Para hallar áreas y volúmenes, los egipcios utilizaban fórmulas obtenidas experimentalmente, mientras que los griegos las obtuvieron mediante un proceso deductivo.

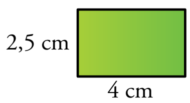
La culminación llegó con Arquímedes de Siracusa, que supo obtenerlas por métodos muy sofisticados.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Medidas en los cuadriláteros

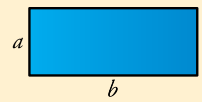
Cálculo mental

Di el área y el perímetro de este rectángulo:



Rectángulo

Tanto el área como el perímetro de un rectángulo son muy conocidos.

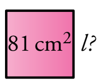


ÁREA $A = a \cdot b$

PERÍMETRO $P = 2a + 2b$

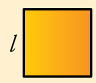
Cálculo mental

¿Cuál es el lado de este cuadrado cuya área conocemos? ¿Y su perímetro?



Cuadrado

Un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales. Por tanto:

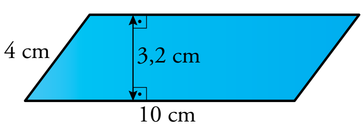


ÁREA $A = l^2$

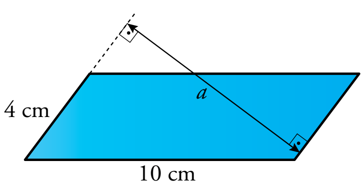
PERÍMETRO $P = 4l$

Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este paralelogramo:

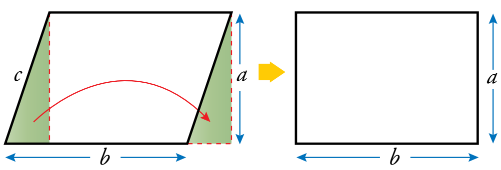


Y ahora que ya conoces el área, ¿sabrías calcular la otra altura? Es decir, la distancia entre los otros dos lados.

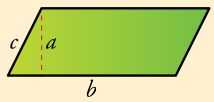


Paralelogramo cualquiera

Al suprimir en el paralelogramo el triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones $a \times b$.



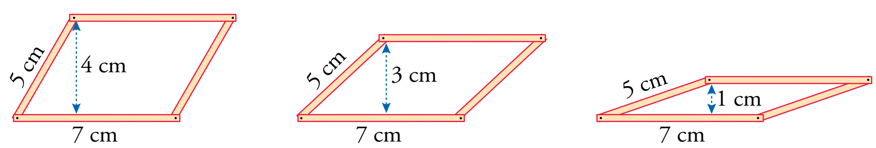
PARALELOGRAMO DE LADOS b Y c Y ALTURA a



ÁREA $A = a \cdot b$

PERÍMETRO $P = 2b + 2c$

Observa que puede haber muchos paralelogramos con los mismos lados pero con distinta área:



Piensa y practica

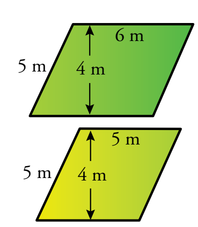
1. Calcula el perímetro y el área de un salón rectangular de dimensiones 6,4 m y 3,5 m.

2. Mide las dimensiones de una página de este libro. ¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para hacer el libro completo, sin contar las tapas?

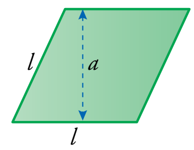
3. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 225 cm^2 de área?

4. Halla la altura de un rectángulo de 47 m^2 de superficie y 4 m de base.

5. Halla el área y el perímetro de estos dos paralelogramos. Observa que, aunque el segundo es un rombo, su área se puede calcular como la de un paralelogramo cualquiera.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



Cálculo mental

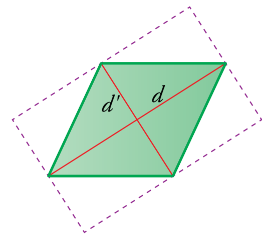
- Las diagonales de un rombo miden 6 cm y 10 cm. ¿Cuál es su área?
- La diagonal de un cuadrado mide 4 dm. ¿Cuál es su área?

Rombo

Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área se puede calcular como se ha descrito en el apartado anterior:

$A = l \cdot a$ (a es la distancia entre dos lados opuestos).

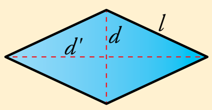
También se puede calcular conociendo sus diagonales.



Área del rectángulo morado: $A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$

Área del rombo: $A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{A_{\text{RECTÁNGULO}}}{2}$

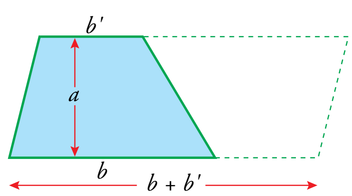
ROMBO DE LADO l Y DIAGONALES d Y d'



ÁREA $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$

PERÍMETRO $P = 4l$

Trapecio



A los lados paralelos de un trapecio se les llama **bases** (b, base mayor; b', base menor). A la distancia entre las bases, **altura,** a.

Si a un trapecio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a.

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$$

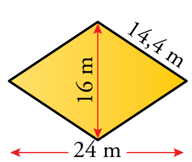
No hay una fórmula especial para el perímetro del trapecio.

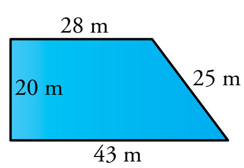
Cálculo mental

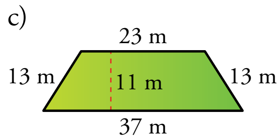
Las bases de un trapecio miden 13 cm y 7 cm. Su altura, 10 cm. ¿Cuál es su área?

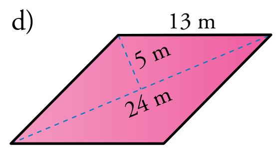
Piensa y practica

6. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:

a)


b)


c)


d)


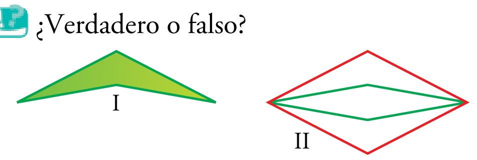
7. Una parcela cuadrangular tiene dos lados paralelos de longitudes 37,5 m y 62,4 m. La distancia entre esos lados paralelos es 45 m.

¿Cuál es la superficie de la parcela?

8. Las diagonales de un rombo miden 37 cm y 52 cm. Halla su área.

9. La diagonal de un cuadrado mide 15 cm.
Halla su área. (Recuerda, el cuadrado es, también, rombo).

10. ¿Verdadero o falso?



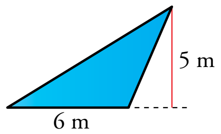
El área del *ala-delta* de la figura I se puede hallar calculando el área del rombo rojo (figura II), restándole el área del rombo verde y dividiendo la diferencia por 2.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

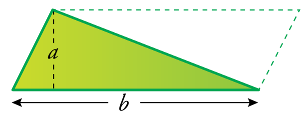
2 Medidas en los triángulos

Cálculo mental

Halla el área de este triángulo:



Observa: si a un triángulo le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo. Por tanto, el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo.



$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

No hay una fórmula especial para el cálculo del perímetro de un triángulo.

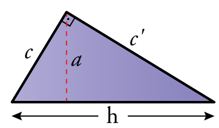
Si el **triángulo** es **rectángulo,** los catetos son perpendiculares. Tomando uno como base, el otro es la altura. Por tanto, el área se puede calcular de dos maneras:

Notación

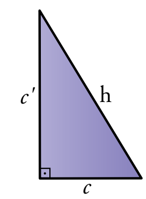
c y c' son los catetos.

h es la hipotenusa.

a es la altura sobre la hipotenusa.



$$A = \frac{\text{h} \cdot a}{2}$$

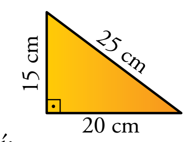


$$A = \frac{c \cdot c'}{2}$$

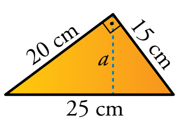
Ejercicios resueltos

1. ***Calcular el área del triángulo rectángulo de lados 15 cm, 20 cm y 25 cm. Calcular la altura sobre la hipotenusa. Hallar, también, su perímetro.***

Los dos catetos son los lados menores.



El área es, pues: $A = \frac{c \cdot c'}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$



El área también se puede calcular así:

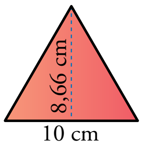
$$A = \frac{25 \cdot a}{2}$$

Como $A = 150 \rightarrow \frac{25 \cdot a}{2} = 150 \rightarrow 25 \cdot a = 300 \rightarrow a = \frac{300}{25} = 12 \text{ cm}$

La altura sobre la hipotenusa mide 12 cm.

Su perímetro es 15 cm + 20 cm + 25 cm = 60 cm.

2. ***Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm y 8,66 cm de altura.***



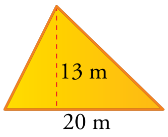
$$A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$$

El área es 43,3 cm^2.

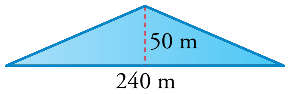
Piensa y practica

1. Halla el área de estos triángulos:

a)



b)



2. De un triángulo rectángulo, conocemos los tres lados: c = 18 cm, c' = 24 cm y h = 30 cm.

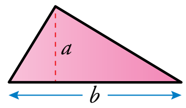
a) Calcula su área.

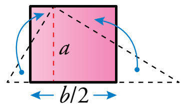
b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

3. Halla el área de un triángulo equilátero de 40 m de lado y 34,64 m de altura.

4. ¿Verdadero o falso?

En las siguientes figuras, se ve que el área de un triángulo es igual al área de un rectángulo con su misma altura y la mitad de su base.



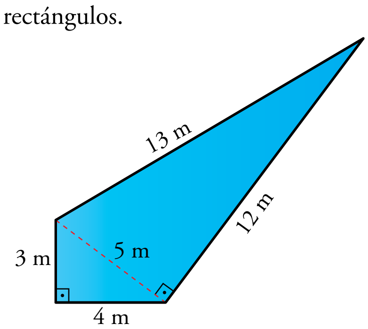


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

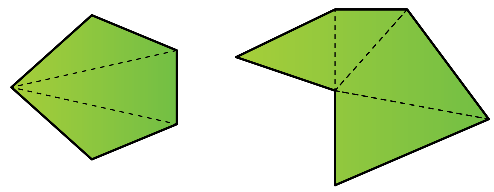
3 Medidas en los polígonos

Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este cuadrilátero irregular. Observa que se puede descomponer en dos triángulos rectángulos.



Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se calcula el área de cada uno.

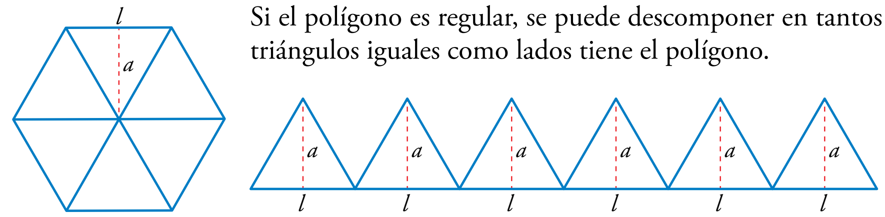


ÁREA DEL POLÍGONO =
= Suma de la áreas de los triángulos

Sin embargo, para los polígonos regulares se puede proceder de una forma más sencilla.

Área y perímetro de un polígono regular

Si el polígono es regular, se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.



$$A = n \text{ veces } \frac{l \cdot a}{2} = \frac{Perímetro \cdot a}{2}$$

n es el número de lados y, por tanto, $Perímetro = n \cdot l$.

En la web

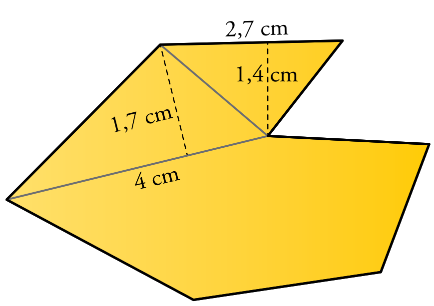
Practica calculando áreas.

Notación

a es la apotema del polígono regular.

Piensa y practica

1. Calca este polígono en tu cuaderno, continúa descomponiéndolo en triángulos y toma en ellos las medidas necesarias para calcular sus áreas. Halla, así, el área total.

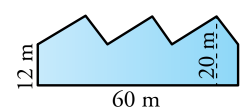


2. En el hexágono regular, la longitud del lado es igual a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Dibuja un hexágono regular cuyo lado tenga una longitud $l = 4$ cm. Mide su apotema y comprueba que es de, aproximadamente, 3,5 cm. Calcula su área.

3. El lado de un octógono regular mide 15 cm, y su apotema 18,9 cm. Halla su área.

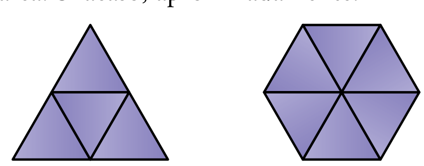
4. Calcula el área de la siguiente figura:



5. ¿Verdadero o falso?

a) En los polígonos irregulares, no se puede calcular el área. Si acaso, aproximadamente.

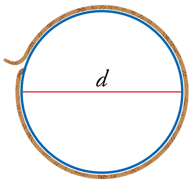
b)



Con estas dos figuras se ve que si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro, entonces el área del triángulo es 3/4 de la del hexágono.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Medidas en el círculo

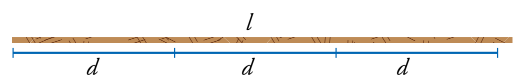


$l = \pi d = 2\pi r$

El número π (pi) vale, aproximadamente, 3,14 o 3,1416.

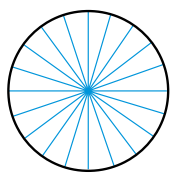
Perímetro del círculo

El perímetro de un círculo es la longitud de su circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia es algo más de tres veces su diámetro.

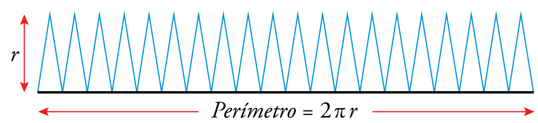


Longitud de la circunferencia = 3,14 veces su diámetro $\rightarrow$ $l = \pi d = 2\pi r$

Área del círculo



Descomponemos el círculo en muchos triángulos, como si fuera un polígono regular de muchos lados.



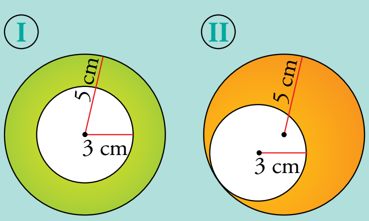
Si los sectores son muy finos, son prácticamente triángulos. Su altura es r.

La suma de todas sus bases es el perímetro del círculo, $2\pi r$. Por tanto, su área es:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Ejercicio resuelto

Hallar el área y el perímetro de los recintos coloreados.



I. Estas dos circunferencias se llaman **concéntricas,** porque tienen el mismo centro. La región comprendida entre ellas se llama **corona circular.** Su área es la diferencia de las áreas de los dos círculos.

$$A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi = 50{,}26 \text{ cm}^2$$

El perímetro del recinto es la suma de las longitudes de las dos circunferencias:

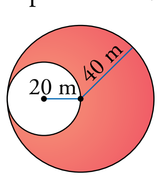
$$P = 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 3 = 16\pi = 50{,}26 \text{ cm}$$

Curiosamente, su área en centímetros cuadrados coincide con su perímetro en centímetros. Es, simplemente, una casualidad.

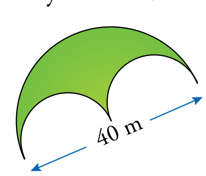
II. Aunque la forma sea distinta, tanto su área como su perímetro coinciden con los del recinto anterior.

Piensa y practica

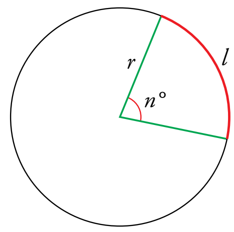
1. Halla la superficie y el perímetro del recinto coloreado.



2. Calcula el perímetro y el área de esta figura:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

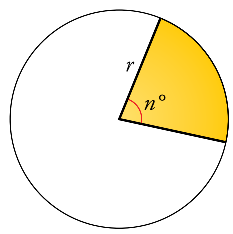


Longitud de un arco de circunferencia

La circunferencia completa, cuya longitud es $2\pi r$, corresponde a un arco de 360°.

Así, a cada grado le corresponde una longitud de $\frac{2\pi r}{360}$. Por tanto:

> Un arco de n grados tiene una longitud de $l = \frac{2\pi r}{360} \cdot n$.



Área de un sector circular

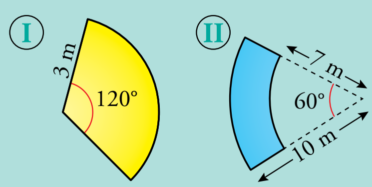
El círculo completo, cuya superficie es πr^2, corresponde a un arco de 360°.

Así, a cada grado le corresponde una superficie de $\frac{\pi r^2}{360}$. Por tanto:

> Un sector de n grados tiene una superficie de $A = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n$.

Ejercicio resuelto

Calcular el área y el perímetro de estos recintos:



I. $A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360} \cdot 120 = 3\pi = 9{,}42 \text{ m}^2$ $\quad P = \frac{2\pi \cdot 3}{360} \cdot 120 + 3 + 3 = 12{,}28 \text{ m}$

II. $A = (\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 7^2) \cdot \frac{60}{360} = 26{,}69 \text{ m}^2$

$P = \frac{2\pi \cdot 10}{360} \cdot 60 + \frac{2\pi \cdot 7}{360} \cdot 60 + 2\,(10 - 7) = 10{,}46 + 7{,}33 + 6 =$

$= 23{,}79 \text{ m}$

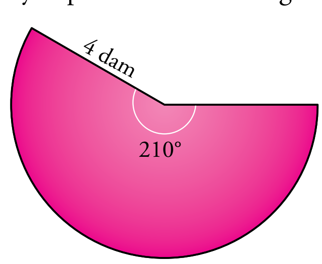
Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) El valor de π es tanto mayor cuanto más grande sea la circunferencia sobre la que actúa.

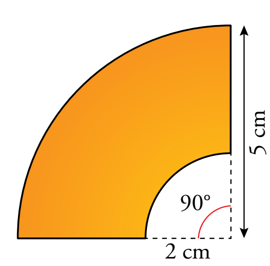
b) Cuando tomamos para π el valor 3,14, lo estamos haciendo de forma aproximada.

4. Halla el área y el perímetro de esta figura:



5. Halla la longitud de un arco de circunferencia de 10 cm de radio y 40° de amplitud.

6. Calcula el área y el perímetro de esta figura:



7. Calcula el área de un sector circular de 20 cm de radio y 30° de amplitud.

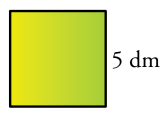
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

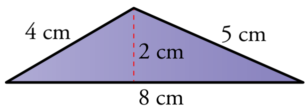
Áreas y perímetros de figuras sencillas

Halla el área y el perímetro de cada una de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

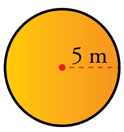
1. a)



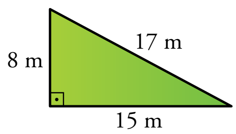
b)



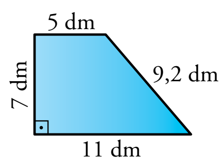
2. a)



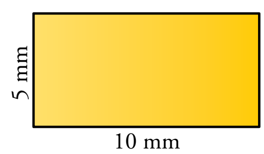
b)



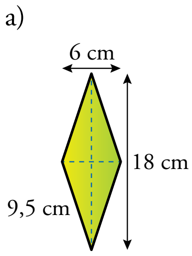
3. a)



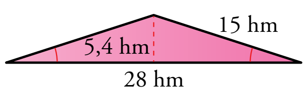
b)



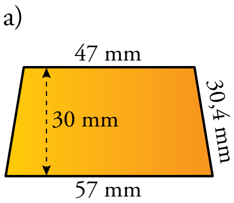
4. a)



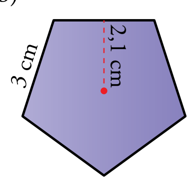
b)



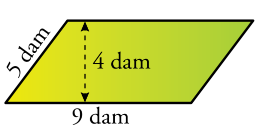
5. a)



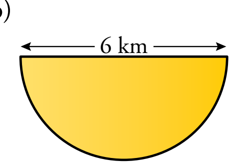
b)



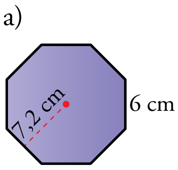
6. a)



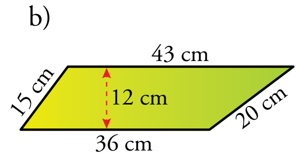
b)



7. a)



b)



8. Averigua cuánto mide la altura de un rectángulo de 40 m^2 de superficie y 5 m de base.

9. Halla el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 20 cm, y su altura, 10 cm.

10. Las bases de un trapecio isósceles miden 26 cm y 14 cm; la altura, 8 cm, y otro de sus lados, 10 cm. Calcula el perímetro y el área de la figura.

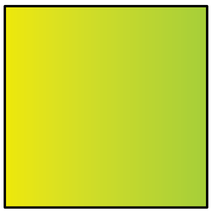
11. Los lados de un triángulo rectángulo miden 15 dm, 8 dm y 17 dm. Calcula su área y la altura sobre la hipotenusa.

12. Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 mm de lado y 5,2 mm de apotema.

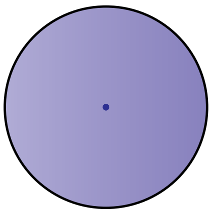
Medir y calcular áreas y perímetros

En cada una de las siguientes figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que medir algún elemento (lado, diagonal, radio…):

13. a)

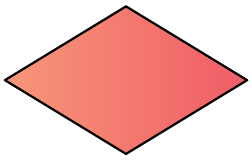


b)

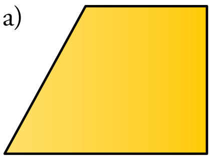


14. a)

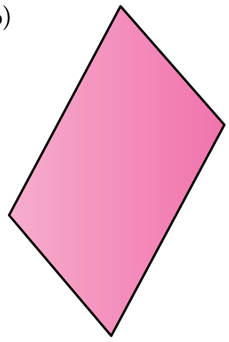
b)



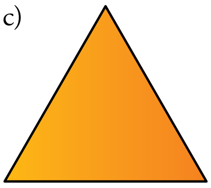
15. a)



b)



c)

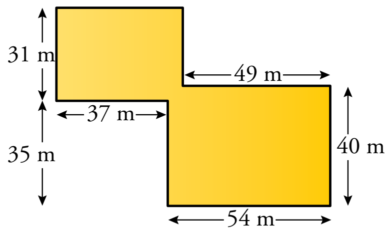


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

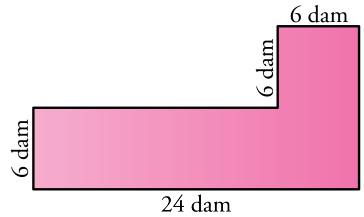
Áreas y perímetros menos sencillos

Halla el perímetro y el área de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

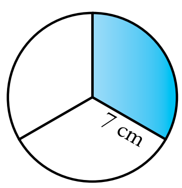
16. a)



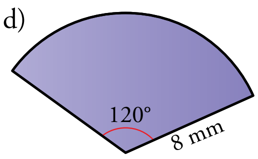
b)



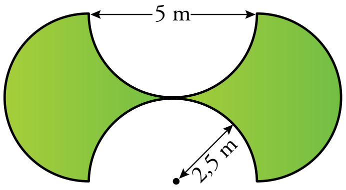
c)



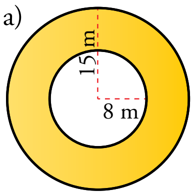
d)



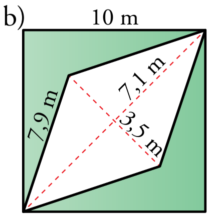
e)



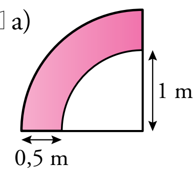
17. a)



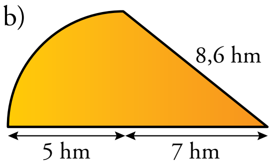
b)



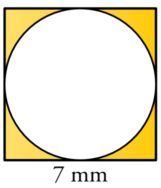
18. a)



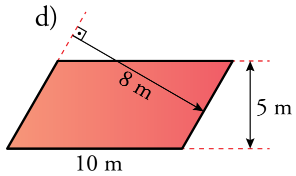
b)



c)



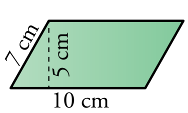
d)



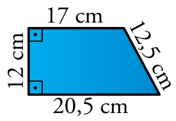
Autoevaluación

1. Calcula el área y el perímetro de cada una de las siguientes figuras:

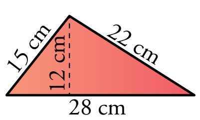
a)



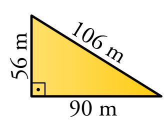
b)



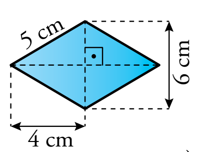
c)



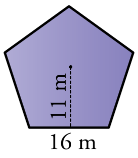
d)



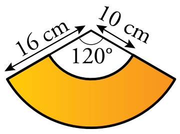
e)



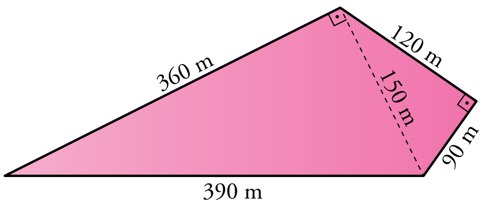
f)



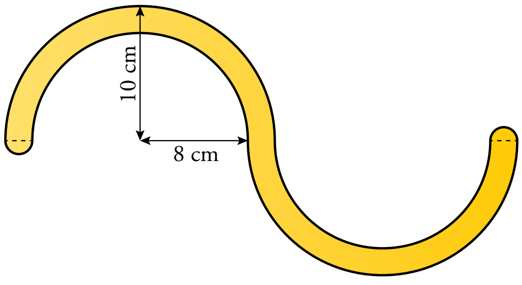
g)



2. Calcula el área de este campo:



3. Halla el área y el perímetro de esta figura:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....